

Le transfini, les structures et la logique

La Philosophie Mathématique de Russell revisitée¹

JEAN-CLAUDE DUMONCEL

Dans sa lettre du 2 octobre 1901 à Couturat², Russell écrit :

Je croyais pouvoir réfuter Cantor ; maintenant je vois qu'il est irréfutable. Ma logique des relations s'applique magnifiquement à tous ses raisonnements.

Nous dirons que ces deux phrases forment la *Déclaration de 1901*. Elle nous conduit à ce qui sera l'idée directrice de la présente étude : à savoir que la philosophie mathématique de Russell se définit principalement à partir d'une rencontre de Cantor. Et quand on veut comprendre une rencontre, évidemment, il faut se demander d'abord ce que chacun des protagonistes apporte dans la rencontre.

L'œuvre de Cantor, en dépit de son ampleur et de sa complexité, peut être décrite avec le plus grand laconisme : *Cantor est le mathématicien qui a découvert les nombres infinis* (comme par exemple le nombre des nombres finis (1, 2, 3, etc.) ou le nombre des points sur une droite).

Quant à ce que Russell apporte de son côté, une première indication nous est donnée par la Déclaration de 1901. Kant voyait dans la logique formelle une science «close et achevée», identifiable à la Syllogistique d'Aristote. Mais la syllogistique ne

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

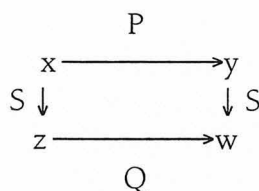
* Cet article développe une conférence faite à l'Université de Grenoble lors de la Journée Bertrand Russell organisée par Denis Vernant le 10 février 2003. De cette chaleureuse rencontre, je suis reconnaissant à tous les participants, et d'abord à Denis Vernant. Je remercie également Ivor Grattan-Guinness pour sa lecture du texte in statu nascendi et pour ses remarques critiques. La responsabilité des thèses ici soutenues, cependant, m'incombe intégralement.

1. Pour une introduction à la problématique d'ensemble, v. notre *Philosophie des mathématiques*, Ellipses, Paris, 2002, et notre étude " La philosophie des mathématiques au temps du postmoderne ", *History and Philosophy of Logic*, 23 (2002), 121-132, ainsi que notre recension de Giaquinto dans la même revue, 24 (2003), 250-253.

2. Bertrand Russell & Louis Couturat, *Correspondance (1897 – 1913)*, édition et commentaire par Anne-Françoise Schmid, Éditions Kiné, Paris, 2001.

considère que les raisonnements portant sur des attributs, tels que «homme», «athénien», ou «mortel». Or nous raisonnons aussi sur des relations, telles que «ami», «supérieur», «intermédiaire», etc. D'où la logique des relations développée en particulier par Schröder et par Peirce avant que s'y joigne Russell. Mais parmi les logiciens des relations Russell n'est pas seulement un auteur de plus : il a fait avec les relations (à partir des *Principles of Mathematics* de 1903) quelque chose que personne d'autre n'avait fait avant lui. Nous pouvons dire que *Russell est le logicien (ou peut-être le métaphysicien) qui a découvert les Corrélations de Relations*.

Russell a résumé cette découverte dans un schéma que nous appellerons pour l'instant le *Rectangle relationnel de Russell* :



Afin de nous donner une première idée de tout ce que contient ce schéma (dont le dessin se trouve dans l'*Introduction à la Philosophie Mathématique* de 1919, en abrégé *iPhMath*), nous allons développer un exemple que Russell en donne en 1959, dans *My Philosophical Development*³ et qui est sans doute chez lui sa plus belle illustration. C'est ce que nous nommerons *le Paradigme de la Procession*. Imaginons donc, au cours d'une cérémonie, une procession où se succèdent – évidemment selon l'ordre protocolaire ou ordre de préséance le plus strict – les couples participant à la cérémonie, et dont chacun est composé d'une Lady et d'un Gentleman, marchant bras-dessus bras-dessous. Afin de mieux préparer la rencontre de Cantor, nous pouvons même imaginer que cette procession est *infinie* (au moins par un bout). Dans cet exemple, les éléments du Rectangle Relationnel reçoivent les illustrations suivantes : la relation *P* est la relation *précéder* qui joue entre un gentleman *G* et un gentleman *G'*. La relation *Q* est la relation *venir avant*, qui a lieu entre une lady *L* et une lady *L'*. Certains esprits simplificateurs (sans être forcément simplistes) pourraient être tentés d'affirmer que si un gentleman précède un autre, alors la lady qui est bras-dessus bras-dessous avec le premier précède aussi celle qui est bras-dessus bras-dessous avec le second. Mais c'est que ces esprits ne connaissent pas les us et coutumes du pays où avance la procession. La chose peut être prise de plusieurs manières. Il y a d'abord la manière *traditionaliste* : On ne dit pas qu'une lady «précède» une lady, on dit qu'elle *vient avant* ; c'est ainsi. Il y a ensuite la manière *mythique* : selon une très vieille légende, la différence entre précéder et venir avant tient à un caractère sexuel secondaire ou tertiaire : quand un gentleman *marche* devant un gentleman, la lady qui est bras-dessus bras-dessous avec le premier *court*

3. B. Russell, *My Philosophical Development*, pp. 68-69.

devant celle qui est bras-dessus bras-dessous avec le second. Il va de soi qu'il ne s'agit ici que d'une légende, puisque dans la réalité un *gentleman*, en aucun cas, ne peut faire courir une lady. Cependant si quelqu'un ne trouve aucun autre moyen de s'expliquer ici la différence entre *P* et *Q*, il ne lui est pas absolument interdit de recourir à cette légende, en attendant mieux. Et maintenant que nous en avons fini avec cette objection obtuse, nous pouvons terminer l'illustration en ajoutant que la relation *S* est ici la relation «donne le bras».

Le Paradigme de la Procession nous offre déjà une première idée de ce que peut être une Corrélation de Relations. Dans notre procession, en effet, nous pouvons dire que les relations *P* et *Q*, Précéder et Venir avant, sont *mises en corrélation* par une tierce relation *S* comme Donner le bras. Cette relation illustre ici ce que Russell appelle un *Corrélateur ordinal*, et ce vocable résume la signification mathématique du Rectangle Relationnel telle qu'il est illustré par le Paradigme de la Procession, à savoir que (p. 69), quel que soit l'ordre de préséance entre Gentlemen, le Corrélateur ordinal conduit au même ordre de préséance entre Ladies. C'est-à-dire que le Corrélateur ordinal est un *Préservateur de l'Ordre*.

Le Rectangle Relationnel que Russell illustre ainsi par le Paradigme de la Procession aux pages 68-69 de *My Philosophical Development* se révèle alors la Synecdoque d'un Synopsis qu'il expose page 72 et que nous appellerons le *Synopsis de 1959*. C'est l'épitomé de la Philosophie Mathématique russellienne selon Russell en personne, revisitant les *Principia Mathematica* quelque cinquante ans plus tard. C'est le filtrage des *Principia Mathematica* en trois lignes de *My Philosophical Development* :

«Structure» est l'une de ces locutions qui, comme «etc.» et «série», sont employées familièrement bien qu'aucun sens précis ne leur soit donné.

Dans cette phrase, nous devons distinguer entre le propos philosophique général et son application spécifique aux mathématiques. Le propos philosophique est transparent: il s'agit de *donner un sens précis aux mots de la tribu* (c'est Bergson chez Mallarmé). L'application aux mathématiques donne le Développement du Synopsis entre les pages 69 et 72, en trois Points Capitaux que nous appellerons les *trois Points de 1959* :

1° «Au moyen de l'arithmétique-des-relations le concept de "structure" peut être précisément défini», sachant que «les nombres-relation sont essentiels à l'intelligence de la structure» (p. 72)

2° Le concept «exprimé dans le langage ordinaire par les mots "et ainsi de suite" vient logiquement avant le concept de "nombre"» (p. 71).

3° «Le mot "Série" est ancien et familier, mais je pense que je suis la première personne à lui donner un sens exact». (p. 69) NB. Le mot «serie», chez Russell, n'a pas le sens usuel qu'on lui donne en mathématiques ; afin d'éviter l'équivoque nous le traduirons en l'écrivant «Série».

En 1925, dans son article «Foundations of Mathematics», F. P. Ramsey a distribué les rôles en philosophie mathématique : il en a fait un débat entre le formalisme de Hilbert, l'intuitionisme de Brouwer et le logicisme de Frege, auquel il rattache Whitehead & Russell. Mais la manière dont Russell se charge lui-même de résumer

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

sa conception des mathématiques dans son autobiographie intellectuelle (en se reportant à un concept qu'il a forgé en 1901 et nommé en 1919) montre que chez lui nous sommes plus précisément devant un *logicisme structuraliste* et même finalement, devant un **Structuralisme** logiciste.

Et d'abord nous allons rencontrer ici ce qu'il faut appeler la *leçon de Cavaillès*. Dans «L'œuvre de Jean Cavaillès»⁴, Gaston Bachelard a indiqué qu'«il faut lire» les deux thèses de Cavaillès (publiées en 1938) «dans l'ordre suivant» :

1° *Remarques sur la Formation de la théorie abstraite des Ensembles* ;

2° *Essai sur le problème du Fondement des Mathématiques*.

Or dans l'*Essai*, Cavaillès expose en détail le débat défini en 1925 par F. P. Ramsey, pour y prendre position. Mais si Bachelard stipule que la thèse secondaire doit être lue avant la thèse principale, c'est parce qu'il a compris que le débat décrit chez Ramsey ne peut s'expliquer qu'en remontant d'abord à sa cause chez Cantor, exposée dans les *Remarques* de Cavaillès. Le fait que Cantor est *derrière* le débat qui oppose Frege, Hilbert et Brouwer nous permet de comprendre l'enjeu du Synopsis de 1959, à savoir un *débat interne au lignage qui conduit de Cantor au Logicisme*.

C'est ce qui va donner toute leur portée aux 3 points de 1959 :

Le point 2°, sur «etc.», permet de *situer Peano & Frege* – par rapport à Cantor.

Le point 3°, sur le concept de Série, permet de *situer Cantor* lui-même.

Le point 1°, sur les concept de Structure et de Nombre-relation, permet à Russell, finalement, de *déborder Cantor* à son tour.

Il en ressort que le *rapport à Cantor* est, chez Russell, ce qui détermine la totalité de sa philosophie mathématique, y compris jusqu'au débordement.

Lorsque ce débordement est pris en considération, nous pouvons saisir ce qu'il convient d'appeler la *vision des Mathématiques* de Russell, exposée dans son livre de 1919. Comment Russell, de sa prison, voit-il dans leur totalité les Mathématiques ? C'est ce qu'il nous dit dans l'*Introduction à la Philosophie Mathématique*, au premier paragraphe du chapitre VII⁵. Là, comme quelqu'un qui, placé sur la hauteur d'une ligne de partage des eaux, peut porter ses regards sur deux paysages opposés, Russell trace une distinction entre deux formes principales que peuvent prendre les «extensions de l'idée de nombre». Il y a d'abord les extensions bien connues «aux nombres négatifs, fractionnaires, irrationnels et complexes». C'est ce que nous pouvons caractériser aussi comme les extensions *pro-géométriques* de l'idée de nombre. En les mettant bout-à-bout, il s'agit principalement de combler, en termes aristotéliens, l'écart originaire entre les quantités discrètes et les quantités continues. Mais Russell a aussi en tête une tout autre généralisation de la notion de Nombre, qui procède ici

4. Postface au *Jean Cavaillès* de Gabrielle Ferrières, 1950, réédité par les Éditions du Félin, Paris, 2003.

5. B. Russell, *Introduction à la Philosophie Mathématique*, ed. Dover, p. 63 ; traduction Rivenc, Paris, Payot, p. 137.

directement par un emboîtement de classes décrit au chapitre précédent (pp. 56-57). Dans cette gigogne, la classe la plus petite est celle des nombres *ordinaux*, le moyen terme est celui des nombres *sériels*, et la classe englobante est celle des *Nombres-relation*.

Ici deux questions nous attendent. D'abord une généralisation ne se comprend que si l'on sait d'abord ce que l'on généralise. Et par conséquent nous devons d'abord indiquer sur quoi portent en commun les deux généralisations principales envisagées dans la vision de Russell. Par là-même, nous répondrons par-dessus le marché à une autre question. Étant donné le débat ouvert en philosophie mathématique par la création cantorienne, entre les trois Écoles opposées par F. P. Ramsey, il est naturel se demander pour commencer si ces trois Écoles sont en désaccord sur *tous* les points, ou s'il n'y aurait pas au contraire un terrain de convergence au moins où elle pourraient se rencontrer, un *territoire neutre* de la Philosophie Mathématique, sur lequel parviendraient à se rejoindre des mathématiciens aussi différents, par exemple, que Cantor ou Hilbert d'une part et Poincaré ou Kronecker de l'autre.

La réponse à ces deux questions se trouve, toujours en 1919, au tout début du 1^{er} chapitre de *l'Introduction à la Philosophie Mathématique* (p. 2). Elle est donnée dans ce que Russell désigne comme «la Série des nombres entiers» et qu'il décrit ainsi :

1, 2, 3, 4, ...etc.

Appelant N l'ensemble des entiers naturels, nous désignerons par sN cette Série de nombres, pris ainsi dans leur ordre naturel. C'est sur le territoire donné dans cette série que va se faire la rencontre entre Cantor et Russell. Afin de ne pas préjuger de leur convergence, nous maintiendrons au moins dans un premier temps la différence de vocabulaire entre les deux auteurs, de sorte que ce qui est décrit comme Série chez Russell sera dit Séquence chez Cantor. Ceci étant posé, nous pouvons maintenant nous demander ce que Russell a rencontré chez Cantor.

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

I. L'UNIVERS DE CANTOR : LE TRANSFINI, SON PARADIGME & SES PARADOXES

Afin de nous orienter sur le Transfini, nous pouvons d'abord l'imaginer comme une immense Montagne (en gardant à «immense», donc, son sens étymologique) dont il serait possible d'attaquer l'ascension soit par la face Ouest, soit par la face Est. Dans son livre sur Cantor⁶, J. W. Dauben déclare : «there were a number of different ways in which Cantor felt the concept of infinity could be regarded» (p. 245). Cela équivaut au fait que l'infini peut revêtir différentes *formes* que nous appellerons les *formes de l'Infini*. Plus précisément, le Transfini offre *deux Aspects* principaux que

6. Joseph Warren Dauben, *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, 1979.

nous appellerons les *Deux Côtés du Transfini* (ou encore le «deux côtés de Cantor»). Nous les nommerons respectivement : *le Transfini exponentiel* et *le Transfini Tour de Babel*.

Ils peuvent être notés dans le symbolisme inventé par Cantor pour les ensembles en général. Considérons d'abord des ensembles finis tels que $E = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$, $F = \{3, 4, 5\}$ et $G = \{\text{David}, \text{Salomon}\} = \{\text{Salomon}, \text{David}\}$. Cantor définit deux opérations sur un ensemble quelconque E , notées respectivement par des symboles que (pour des raisons typographiques) nous écrirons 'E et "E. En 1887, Cantor introduit de surcroît, au sujet des ensembles une distinction entre leur *matière* et leur *forme*. Cette distinction est à comprendre comme analogue à celle qui définit la logique formelle. En logique formelle, quand nous trouvons p. ex. des prédicats P tels que « $x > y$ » et « x aime y », nous pouvons pratiquer une opération *Forme* (P) qui nous donnera dans ce cas

$$\text{Forme} («x > y») = \text{Forme} («x aime y») = \phi(x, y)$$

De même, ici, nous aurons $f(E) = f(F) = \{a, b, c\}$, puis $f(G) = \{a, b\}$. Nous appellerons des notations comme $\{a, b, c\}$ ou $\{a, b\}$ des *transpositions littérales* de E ou F et de G , respectivement ; nous dirons aussi qu'il s'agit d'*Ensembles Alphabétiques*. Ils représentent la *forme cantorienne* des ensembles dont ils sont la transposition littérale. La seconde opération, appliquée à un ensemble, nous donne le nombre cardinal de ses éléments : par exemple "E = "F = 3 et "G = 2. À titre de variante symbolique, nous pouvons donc poser aussi la convention "E = c(E). Et parallèlement nous introduirons l'écriture o(E) pour l'ordinal, de telle sorte que l'on ait p. ex.

$$o\{1, 2, 3\} = o\{3, 2, 1\} = o\{3, 4, 5\} = \text{Df } o\{a, b, c\} = 3.$$

Ces deux notations seront ensuite étendues aux ensembles infinis.

Ainsi c'est toute la *Théorie des Ensembles* quelconques E (finis ou infinis) qui va présenter un **Aspect** "E et un **Aspect** 'E. Il s'agit maintenant de savoir ce qu'ils deviennent dans le cas du **Transfini**.

1. Le Transfini exponentiel est à qualifier ainsi parce que les deux concepts principaux de la théorie des ensembles qui déterminent l'aspect "E sont ceux de *puissance* "E d'un ensemble E quelconque et d'*ensemble-puissance* d'un ensemble donné.

Deux ensembles E et F sont dits (depuis 1879) avoir même *puissance* quand il y a bijection entre eux. Alors "E = F.

Étant donné un ensemble E , on appelle *ensemble-puissance* de E l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E qui se note $\mathcal{P}(E)$. Par exemple, si $E = \{1, 2\}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}.$$

Il y a beaucoup de théorèmes chez Cantor (et presque tous les plus importants sont autant de paradoxes) mais il y en a un qui est appelé *le Théorème de Cantor* (1891). Il est déjà illustré par l'exemple précédent. C'est le théorème énonçant d'abord que *la puissance d'un ensemble (E) est toujours surpassée par la puissance de son ensemble-puissance $\mathcal{P}(E)$* :

$${}^{\text{“}}E < {}^{\text{“}}\mathcal{P}(E).$$

Dans le Théorème de Cantor, c'est ce que l'on peut appeler l'*Inéquation de Cantor*. Le même exemple illustre aussi l'équation indiquant le rapport numérique entre la puissance d'un ensemble et la puissance de son ensemble-puissance :

$${}^{\text{“}}\mathcal{P}(E) = 2 \text{ } {}^{\text{“}}E.$$

C'est ce que nous appellerons l'*Équation de Cantor*. L'élévation à la puissance ${}^{\text{“}}E$ (*puissance de E*) qui est à droite explique pourquoi l'ensemble ${}^{\text{“}}\mathcal{P}(E)$ à gauche est appelé «ensemble-puissance».

L'inéquation et l'Équation de Cantor composent à elles deux ce qu'on peut appeler le Théorème (à première vue) *aparaadoxal* de Cantor. Et ce théorème est démontré pour un ensemble E quelconque ; il s'applique donc *indifféremment à la différence entre fini et infini*. Lorsqu'il est appliqué aux ensembles infinis (comme l'ensemble des entiers naturels) il pénètre à nouveau dans l'élément des paradoxes : il donne (par simple syllogisme en Barbara) ce que nous appellerons le *Corollaire de Cantor*, à savoir que *la puissance d'un ensemble infini est toujours surpassée par la puissance de son ensemble-puissance*. D'où il suit qu'il existe une infinité d'infinis, parmi lesquels un infini quelconque trouve toujours un infini plus grand que lui. C'est ce que l'on peut appeler, parmi les divers paradoxes de l'Infini, le *Paradoxe Principal* de Cantor. Il suffit à justifier le néologisme «Transfini». On peut appeler Transfini le *nouveau régime de l'infini*, suite à la révolution cantorienne, i.e. ce qui se passe quand *il faut distinguer entre plusieurs puissances (inégaux) de l'infini*.

Parmi les puissances de l'Infini, en nombre infini, la plus petite est celle qui caractérise l'ensemble N des nombres naturels et qui sera dite Puissance du Dénombrable (= DnB). On a ainsi $\text{DnB} = {}^{\text{“}}N$. Ce qui conduit Cantor à énoncer ce qui est sans doute, pour l'Équation de Cantor, son application principale. C'est l'équation qui donne à la Puissance du Continu (= CtN) son expression numérique :

$$\text{CtN} = 2 \text{ } {}^{\text{“}}\text{DnB}$$

2. Le Transfini en Tour de Babel apparaît lorsque *les paradoxes de l'Infini sont suscités par un Paradigme de l'Ensemble*. Ce **Paradigme de Cantor** est obtenu lorsque la notion d'ensemble E quelconque est illustrée par la notion d'*Ensemble Bien Ordonné* B. Ce concept va jouer chez Cantor un rôle dont le seul terme de comparaison est celui de l'Idée du Bien chez Platon. Il va conduire Cantor (dans ses

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

«Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten» de 1887) à introduire (en reprenant le vocabulaire de Platon) la notion de *nombre idéal* (pour qualifier les types d'ordre transfinis). L'idée d'Ensemble Bien Ordonné, en raison du rôle qu'elle joue dans la genèse de la théorie du Transfini, peut être appelée «l'Idée fixe du Pr Cantor». Et un ensemble bien ordonné peut donc, pour cette raison, être appelé plus brièvement un **Cantorien**.

Df. (1883) Par *Ensemble Bien Ordonné* B il faut entendre un ensemble qui a un *1er élément* & où tout élément a exactement un *successeur* (sauf s'il est le dernier).

Dans cette définition, la clause finale entre parenthèses a évidemment pour but de couvrir le cas des ensembles finis. Il faut donc voir comment Cantor définit les ensembles finis.

Df. (1887) Par ensemble *fini* nous entendons un ensemble E qui provient d'un élément-origine par addition successive de nouveaux éléments, de telle sorte que l'élément-origine puisse être retrouvé en faisant *marche arrière* à partir de E par la suppression successive des éléments pris *dans l'ordre inverse*.

Du fait de cet Aller-retour, nous appellerons Palindrome de Cantor le type d'ensemble ainsi défini. Et la définition de 1887, si on la compare à celle de 1883, se révèle être plus précisément une définition de l'Ensemble *bien ordonné* fini. Dans la conjonction de ces deux définitions, l'*élément-origine* de 1887 doit être bien distingué du *1er élément* de 1883 : l'élément-origine est le cas particulier du 1er élément pour les Cantoriens finis. Mais cette variation de vocabulaire fait voir que Cantor, en définissant les Cantoriens finis d'une manière apparemment générale, avait en fait en tête une application tout à fait singulière : l'ensemble bien ordonné des nombres naturels. Quoi qu'il en soit nous pouvons prendre pour exemple du palindrome de Cantor cet ensemble $E = \{1, 2, \dots, n, \dots\} = sN$. Et si nous formons $f(E)$, il vient (en imaginant un Alphabet infini) $f(sN) = \{A, b, \dots, v, \dots\}$. Le point essentiel est que dans un ensemble ainsi ordonné se trouve la différence entre un *1er élément* (marqué ici par la majuscule A) et des *éléments successeurs* (b, c, ... v ...). A cette distinction vont correspondre deux nouveaux *Paradoxes de l'Infini* et deux *exploitations de paradoxe* par les mathématiques.

Supposons d'abord que du côté du premier élément – qui devient ici, par application à sN , *côté de l'Origine* – on ôte un segment fini de la séquence, p. ex. $\{1, 2, 3\}$ ou $\{3, 4, 5\}$. Alors il restera toujours une séquence infinie : respectivement $\{4, 5, \dots, n, \dots\}$ ou $\{1, 2, 6, \dots, n, \dots\}$. Pour une tête pourtant aussi pénétrante que Leibniz, il y avait là une raison suffisante pour écarter la notion de nombre infini. Pour Dedekind, ce sera au contraire la clef d'une *définition* de l'infini : une classe infinie est une classe *réflexive*, c'est-à-dire qui se réfléchit dans une de ses parties, comme dans la bijection entre

1, 2, 3, ... n ...

et

2, 4, 6, ... 2n ...

Il y a là un premier exemple de *paradoxe exploité*, où l'exploitation prend la forme d'une *définition*. Mais chez Cantor l'exploitation de paradoxe va prendre un tout autre tour, du fait qu'il va se tourner *du côté des éléments successeurs*. Des définitions, les mathématiques en donnent depuis toujours. Mais chez Cantor le paradoxe exploité va se trouver pour ainsi dire démultiplié par son couplage à des *Principes de production*. Si, pour un Cantorien $B = \{A, b, \dots \vee \dots\}$ vous notons $o(B)$ son ordinal, alors nous pouvons d'abord interpréter cet ordinal comme une évaluation de la *Longueur* propre à la séquence offerte par l'ensemble. D'abord, nous obtiendrons ainsi

$$o\{A\} = 1, \quad o\{A, b\} = 2, \quad \dots$$

et ainsi de suite pour tous les *Ordinaux finis* qui, à partir du second, sont aussi des *ordinaux successeurs*. C'est là ce qu'obtient chez Cantor, dans une première application, le *Premier Principe de Production*. Mais si nous appliquons le même **Procédé** à la séquence entière, alors il vient

$$o\{A, b, \dots \vee \dots\} = \omega$$

où ω désigne le 1er ordinal transfini. Ainsi trouve une première application le *Second Principe de Production* cantorien qui consiste à engendrer, à partir d'un ensemble bien ordonné infini, un terme supplémentaire indiquant son type d'ordre infini et qui sera dit sa *Limite*.

Si, à la distinction entre l'Élément-Origine et les éléments-successeurs, donnée dans le Palindrome des nombres naturels, nous unissons (au sens booléen) la distinction entre les éléments-successeurs et l'élément-Limite (indiquée par les deux Principes d'engendrement), nous obtenons ce qu'il convient d'appeler l'*Idée* cantorienne de *Nombre Ordinal*. Une *Idée* cantorienne est essentiellement, comme une *Idée* platonicienne, un *Participable*. C'est-à-dire qu'elle est faite pour être participée par des rejets successifs, en une sorte de *Marcottage mathématique*.

C'est ici que va prendre place, parmi les Paradoxes de l'Infini, la *Production Paradoxale de Cantor*. Quand nous avons un ensemble fini comme $\{1, 2, 3\}$, un réarrangement de ses termes comme dans $\{3, 2, 1\}$ ne change rien à son cardinal (= 3) ni à son ordinal (= 3). Avec un ensemble infini comme $\{A, b, \dots \vee \dots\}$, les différents ordres possibles laissent encore invariant le cardinal. Par exemple $c\{A, b, \dots \vee \dots\} = c\{b, c, \dots \vee \dots A\} = Dnb$. Mais en revanche une simple modification de l'ordre peut faire varier l'ordinal. P. ex. on obtiendra d'abord

$$\begin{aligned} o\{A, b, \dots \vee \dots\} &= \omega \\ o\{b, c, \dots \vee \dots A\} &= \omega + 1 \\ o\{c, d, \dots \vee \dots A, b\} &= \omega + 2, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Où nous reconnaissons ici à l'œuvre le *Premier Principe de Production*. Et la Participabilité de l'*Idée* cantorienne implique évidemment que le 2d *Principe* interviendra lui aussi. Afin de l'illustrer, nous imaginerons que notre Alphabet infini

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

rassemble une infinité de consonnes et une infinité de voyelles. Il peut donc être réarrangé pour donner l'équation :

$$o\{b, c, \dots v \dots A, e, \dots o \dots\} = \omega + \omega = 2\omega.$$

Puis seront obtenus à la suite $n\omega$, $\omega\omega = \omega^2$, ω^3 , ... ω , etc.

Nous nous trouvons ici devant *l'Exploitation de Paradoxe* propre à Cantor, dans les premiers pas de la Production Paradoxale qui engendre, après tous les ordinaux finis, une hiérarchie infinie de Classes dont chacune contient une infinité d'ordinaux infinis.

Les Ordinaux finis $\{1, 2, 3, \dots n \dots\}$ seront appelés *Nombres de la Première Classe*, dite Classe I. Le cardinal de cette classe est appelé $\aleph_0$. En d'autres termes

$$\text{"Classe I} = \aleph_0.$$

Les premiers Ordinaux infinis ($\omega, \omega+1 \dots n\omega \dots \omega^\omega \dots$) sont appelés *Nombres de la deuxième Classe*, dite Classe II, avec $II = Z(\aleph_0)$. C'est en effet *l'ensemble de tous les ordinaux qualifiant les Cantoriens de cardinal $\aleph_0$* . Cela puisque c'est à partir d'un ensemble à cardinal évidemment invariant que la production paradoxale peut engendrer une variété infinie d'ordinaux égaux ou supérieurs à son ordinal. C'est la définition que formule Cantor en 1897 (*Beitrag*, § 15). Aussitôt après (§ 16), Cantor démontre la séquence de théorèmes A-F dont les deux extrémités sont les suivantes :

A - L'ensemble de tous les nombres de la Classe II rangés par ordre de grandeur croissante est un ensemble bien ordonné.

F - La puissance de la Classe II est le deuxième nombre cardinal transfini, $\aleph_1$. Autrement dit

$$\text{"}Z(\aleph_0) = \aleph_1.$$

Ainsi le cardinal de la Classe I est-il une sorte de palier qui fournit un point d'appui pour obtenir le cardinal de la Classe II, c'est-à-dire du cantorien rassemblant les ordinaux des cantoriens dont le cardinal est celui de cette Classe I.

La démonstration de F s'appuie sur le théorème E qui s'appuie sur le théorème A. Et on aura

$$o\{\omega, \omega+1 \dots n\omega \dots \omega^\omega \dots\} = \omega_1,$$

premier ordinal de la Classe III, laquelle est égale à $Z(\aleph_1)$ et telle que $\text{"}Z(\aleph_1) = \aleph_2$. Etc.

La transmission du Bon Ordre dans la suite formée par les Classes I, II, etc. qui, à partir de la classe II, se partagent les ω , permet ainsi la définition respective des Alephs: $\aleph_0$, $\aleph_1$, etc. Et plus généralement, la transmission du Bon Ordre parmi les ensembles d'Ordinaux (infinis ou finis) permet d'en soutirer les Cardinaux (respectivement infinis ou finis).

Tel est le *Transfini en Tour de Babel (renversée)*.

3. L'Hypothèse Généralisée du Continu (HGC)

Étant donné le Transfini exponentiel et le Transfini en Tour de Babel, nous pouvons imaginer une «fermeture-éclair» de l'Infini, c'est-à-dire une échelle d'équations qui, à chaque niveau, identifieraient l'aspect potentiel à l'aspect séquentiel :

$$\begin{aligned} & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \text{" } \mathcal{P}\mathcal{P} \text{ } N = \aleph_2 \\ & \text{" } \mathcal{P} N = \aleph_1 \\ & \text{" } N = \aleph_0. \end{aligned}$$

À chaque échelon de cette hiérarchie infinie, le nombre des « $\mathcal{P}$ » donne l'indice n de l' $\aleph_n$. Et cela signifie qu'à chaque niveau l'augmentation de Puissance obtenue du côté gauche par la séquence d'exponentiations $\mathcal{P}$ se ramène du côté droit à un $\aleph$ produit par le marcottage du Bon Ordre avec ses ω . C'est ce qu'on appelle l'*Hypothèse Généralisée du Continu* (HGC), qui chez Cantor se trouve au moins à l'état implicite⁷. Si, sur l'échelle, on prélève l'équation du deuxième échelon, il vient, puisque " $\mathcal{P} N = 2^{\aleph_0}$ ", l'égalité:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

C'est l'Hypothèse du Continu (HC), avancée par Cantor à partir de 1878⁸ et qu'il tentera vainement de démontrer pendant tout le reste de sa vie.

II. STRUCTURALISME & LOGICISME CHEZ RUSSELL

En 1919, au début du Chapitre VI de l'*Introduction à la Philosophie Mathématique*, intitulé «La similarité des relations», Russell introduit le terme «structure» sur l'exemple suivant (trad. Rivenc, p. 120):

Si un lieu est au nord d'un autre, sur la carte l'endroit correspondant au premier est au-dessus de l'endroit qui représente l'autre ; pour un lieu à l'ouest d'un autre, il sera à gauche du second, ainsi de suite. La structure de la carte correspond ainsi à celle de la région représentée (*The structure of the map corresponds with that of the country of which it is a map*). Les relations spatiales sur la carte sont «semblables» aux relations spatiales dans la région dessinée. Tel est le genre de connexion entre relations que nous voulons définir.

Il y a là ce que nous appellerons le Modèle de la Carte & de la Contrée, ou encore le Paradigme du Portulan & du Territoire. Avec le Paradigme de la Procession, c'est

7. Cf. Ivor Grattan-Guinness, *The Search for Mathematical Roots, 1870 - 1940. Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell To Gödel*, Princeton University Press, Princeton, 2000 [en bref : IGC, CRG] : § 3. 5. 2.

8. Cf. Dauben, *op. cit.* p. 66.

l'exemple principal pour introduire à la notion de Similarité des Relation et il montre par conséquent que le concept de **Structure** équivaut chez Russell à la Similarité des Relations. L'idée-clef, ici, c'est que **la Structure est un invariant relativement à la variation dans la nature des relations**. Entre les lieux d'un territoire, nous trouvons des relations *P* comme être au nord ou à l'ouest, entre les points d'une carte des relations *Q* comme être au-dessus ou à gauche. Lorsque nous passons d'un territoire à une carte, les relations n'ont donc pas la même *nature*, mais la *Similarité* ou la *Corrélation* produite par l'existence du *Corrélateur* *S* fait qu'elles ont la même **Structure**. (En ce sens le corrélateur *S* peut être appelé aussi *Corrélateur structural* et le Symbole *S* peut être pris comme l'emblème du Structuralisme de Russell.)

En nous repérant sur la figure



(que nous appellerons le Schéma Γ , avec ses deux flèches qui seront dites respectivement *Longitude* $\rightarrow$ et *Latitude* $\downarrow$ de Γ) nous avons donc à distinguer dans le Rectangle Relationnel entre deux *Directions* principales correspondant à ses deux *Dimensions*. Il y a d'une part la *Direction horizontale* orientant les flèches des relations corrélées *P* ou *Q*. Et il y a d'autre part la *Direction verticale* qui donne l'orientation de l'unique flèche correspondant à la relation corrélatrices.

Une fois que nous avons ainsi vu les flèches intervenant dans le Rectangle Relationnel nous pouvons en venir au B-A-BA de la logique des relations (c'est-à-dire aux éléments du fond commun où Russell se retrouve avec Schröder et Peirce), en nous limitant d'abord comme Russell aux relations binaires, de la forme xRy .

Étant donné une relation comme «*x aime y*» ou «*x < y*», de la forme xRy , le premier problème est de trouver un nom pour ses deux termes, afin de pouvoir distinguer les deux rôles formels différents qu'ils jouent dans toute relation binaire, indépendamment de sa nature. Ici comme partout c'est le choix le plus naturel et le plus simple qui s'impose. Aussi nous écarterons-nous, pour des raisons russelliennes, du vocabulaire de Russell. Une relation binaire est le corrélat ontologique d'un *verbe transitif*, avec son *Sujet* suivi de son *complément d'Objet*. Ce point de grammaire nous dicte le vocabulaire adéquat : dans la forme xRy , *x* est le *Sujet* de la relation dont *y* est l'*Objet*.

Ceci étant posé, l'étape suivante sera la nouvelle application que va trouver ici la Théorie des Descriptions Définies, c'est-à-dire la Grammaire de l'Article défini (iPhMath, p. 167) tel qu'on le trouve par exemple dans une locution comme «l'auteur de *Waverley*». Puisque cette locution est construite sur la relation «*x est l'auteur de y*» où la relation à *y* a une valeur individuante pour *x*, l'usage paradigmatique de la description définie peut être caractérisé symboliquement par l'équation

$$y = R'x$$

dont on voit immédiatement qu'elle est illustrée par les fonctions mathématiques usuelles comme $y = 2x$, $y = \cos x$, etc. - de la forme

$$y = f(x).$$

L'écriture « $y = R'x$ » est donc la *Begriffsschrift* de « $y = f(x)$ ». Le fait que les *descriptions* définies sont le Genre dont les *fonctions mathématiques* sont une Espèce est consacré, dans le vocabulaire de Russell, par leur désignation comme *fonctions descriptives* (iPhMath, p. 46). Or «beaucoup des notions les plus importantes de la logique des relations sont des fonctions descriptives» (p. 47). Il y a là le véritable *fil d'Ariane russellien* pour s'orienter dans la Logique des Relations. Le bout de ce fil que nous tend Russell est un concept qu'il faut appeler *fonction de Relation* et dont la forme générale peut se noter

$$f(R).$$

Parmi les fonctions de Relation se trouve d'abord une division principale entre les fonctions de relation qui sont elles-mêmes des *Relations* et celles qui sont des *Classes*. Les unes comme les autres peuvent être dites *subordonnées* à la Relation dont elles sont fonction. Nous dirons aussi qu'elles constituent l'*Appareil* de la relation. Quatre notions principales vont émerger dans cet Appareil. Comme fonction de relation qui est une relation, nous trouvons d'abord, pour une relation R donnée sa *Converse* cvR que nous symboliserons cR . Par exemple si R est la relation « x précède y », alors cR est la relation « x succède à y » : si $R = \langle \prec \rangle$, ${}^cR = \langle \succ \rangle$. Puis, comme fonctions de relation qui sont des *Classes*, nous trouvons un a-b-c où s'enchaînent (dans le vocabulaire d'aujourd'hui) :

- (a) le *Domaine* D de la relation = ensemble des Sujets de la relation
- (b) son *Codomaine* $\mathfrak{D}$ (dit co- D) = ensemble des Objets de la Relation
- (c) son *Champ* $C = D \cup \mathfrak{D}$.

Par exemple, si R est la relation *précéder* ($R = \langle \prec \rangle$) on a :

$$\begin{aligned} D &= \{\text{Prédécesseurs}\} \\ \mathfrak{D} &= \{\text{Successeurs}\} \\ C &= \{\text{Prédécesseurs ou Successeurs}\}. \end{aligned}$$

Bien entendu, dans cet exemple, dire que les objets de la relation *précéder* sont les Successeurs équivaut à dire qu'ils sont aussi bien les sujets de la relation *succéder* (*converse* de la relation *précéder*) dont les objets sont les Prédécesseurs, sujets de la relation *précéder*. Cela met en évidence que toutes les notions de l'Appareil sont conceptuellement solidaires.

Et c'est chaque relation qui a ainsi son appareil d'entités subordonnées. Mais la *Logique* des Relations parvient au statut d'un *Calcul* des Relations quand elle révèle comment *faire des relations avec des relations*. C'est ce qui accorde son rôle central, en ce domaine au concept de *Produit Relatif* entre relations données. Si par exemple $R =$ « x est frère de y » et $S =$ « y est mère de z », alors on écrira

$R|S = x$ est oncle (maternel) de z .

Afin que le rapport à Cantor puisse révéler toute la portée des idées de Russell, cependant, nous devons exposer maintenant l'*Analogie Principale* sur laquelle sont construits les *Principia Mathematica* (en bref : PM) dans leur totalité. Elle deviendra visible dans une comparaison entre le *73. SIMILARITE DES CLASSES (dans le tome I) et la page 295 du tome II [Partie IV], première page de la SECTION A : SIMILARITE ORDINALE ET NOMBRES-RELATION.

C'est à ce propos que va trouver toute sa portée la figure Γ aux deux flèches



(où nous imaginerons que ses deux flèches sont obtenues à partir du Rectangle Relationnel en y prélevant seulement les flèches représentatives des relations $P \ \& \ S$).

Pour orienter le commentaire comparatif, ici, le fil directeur est fourni par les fonctions dont Russell nous dit (*iPhMath*, p. 46 ; cf. PM, I, p. 15) qu'elles sont d'une nature «encore plus générale et plus fondamentale» que les fonctions descriptives, à savoir les *fonctions propositionnelles* de valence ≥ 1 . Celles-ci se divisent en effet en *attributs* comme « x est circulaire» (quand elle sont de valence 1) et *relations* comme « x engendre y » (quand elles sont de valence > 1). Les relations sont donc une espèce à côté des attributs dans le genre des fonctions propositionnelles. Par ailleurs, dans le PM, Russell soutient que «les classes, dans la mesure où nous les introduisons, sont simplement des commodités symboliques ou linguistiques, non de véritables objets comme le sont leurs membres si ce sont des individus» et il ajoute qu'une proposition concernant une classe «doit toujours être ramenée à un énoncé concernant la fonction qui la définit». Or la fonction propositionnelle qui définit une classe est un Attribut. Par conséquent les deux similarités littéralement désignées dans les *Principia Mathematica*, la *Similarité des Classes* et la *Similarité Ordinale* se ramènent aux deux cas possibles dans lesquels se divise en amont la **Similarité des Fonctions propositionnelles**, pour donner plus fondamentalement la *Similarité des Attributs* et la *Similarité des Relations*.

1. La Similarité des Attributs qui correspond à la SIMILARITE DES CLASSES est identique à la *Cocardinalité des Attributs* : Deux attributs A et B sont similaires si et seulement si (en bref : ssi) il existe une relation R telle que R établit une bijection entre l'extension $\{x : A\}$ de A (ensemble des x qui sont A) et l'extension $\{x : B\}$ de B (ensemble des x qui sont B). Une relation permettant d'établir une bijection est appelée par Russell une relation «de un à un» et l'ensemble de ces relations est noté « $1 \rightarrow 1$ ». Sur la base de ces conventions, la définition de la similarité (sm) entre classes qui est donnée au *73 des PM peut être transposée en une définition de la similarité entre Attributs qui la fonde :

(Df sm Attributs) $A \text{ sm } B \equiv \exists_R R \in (1 \rightarrow 1) \ \& \ \{x : A\} = D'R \ \& \ \{x : B\} = D'R$

«Un attribut A est similaire à un attribut B ssi il existe une relation R telle que R est une relation de un à un, l'extension de A est égale au domaine de R et l'extension de B est égale au codomaine de R.»

Dans ce cas les Attributs A et B sont illustrés par le même *nombre* d'élément et donc les deux attributs ont le même *cardinal* – que ce nombre cardinal soit fini ou infini. Nous retrouvons donc ici à sa racine sur les Attributs l'idée cantorienne d'*équipotence entre ensembles finis ou infinis*, dont la définition des entiers naturels chez Frege s'ajoutait à titre de corollaire dans le cas particulier des nombres finis.

Pour cette double raison nous pouvons donc dire que, dans la Théorie Générale de la Similarité selon Russell, la Similarité des Attributs définit d'abord la place à occuper par la théorie des cardinaux chez Cantor et Frege : ce que nous appellerons la Place de Georg Cantor et Gotlob Frege ou *Place de Cantor & Frege*.

Si nous partons, comme pour le Rectangle Relationnel, de l'idée qu'une relation se représente par un flèche et que la flèche représentant le Corrélateur de la Similarité suit, dans la Figure Γ , la direction verticale, alors nous obtiendrons pour la Similarité des Attributs un analogue du rectangle relationnel pour la similarité des relations. Cet analogue, indiquant la Place de Cantor et Frege selon le Structuralisme de Russell résumé par le Schéma Γ , sera seulement une flèche verticale représentant une relation S entre tout élément x dans un ensemble A qui est son domaine et tout élément z dans un ensemble B qui est son codomaine, relation telle que A et B soient en bijection :

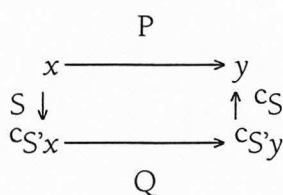
$$\begin{array}{c} x (\in A) \\ S \downarrow \\ z (\in B). \end{array}$$

Cette flèche (avec ce qu'elle comporte) sera dite aussi, relativement au Rectangle Relationnel, *Côté de Cantor & Frege* ou *Axe de Cantor & Frege*. Puisque le rôle de S est d'établir une bijection entre deux ensembles, l'Axe de Cantor & Frege est également à considérer comme le domaine d'application principal pour ce que Boolos appelle *Principe de Hume*, c'est-à-dire pour le rôle de critère conféré à la bijection quant à la définition ou à la comparaison des puissances numériques.

Au *37 des *Principia Mathematica*, p. 280, nous lisons que lorsqu'une relation R établit une bijection entre deux classes α et β , «nous pouvons regarder R comme une transformation appliquée à chaque membre de β et donnant lieu (*giving rise*) à un membre de α ». Déjà Cantor avait donné en 1882 l'indication suivante : «j'ai emprunté le mot *puissance* à J. Steiner qui l'emploie dans un sens tout spécial, cependant voisin pour exprimer que deux figures sont coordonnées l'une à l'autre *projectivement* de telle sorte qu'à tout élément de l'une correspond un et un seul élément de l'autre»⁹.

9.. G. Cantor, *Remarques*, traduction Jean Cavaillès, p. 77 in *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Hermann, Paris, p. 275.

2. La Similarité des Relations, quant à elle, est celle que traite la Section intitulée SIMILARITE ORDINALE ET NOMBRES-RELATION. Elle y est illustrée par une des variantes possibles du Rectangle Relationnel, représentant la même idée que le Rectangle tel quel en d'autres termes :



Le Paradigme de la Procession peut toujours nous permettre de l'illustrer. Ici la modification principale est le remplacement, à droite, de la relation S par la converse qui lui équivaut : y donne le bras à w ssi w prend le bras de y . En conséquence nous pouvons aussi remplacer z et w par leurs fonctions descriptives en fonction de x et y , respectivement : z est qui prend le bras de x et w est qui prend le bras de y , de sorte que $z = {}^cS'x$ et $w = {}^cS'y$. Nous dirons aussi que

${}^cS'x$ = la cavalière de x et que ${}^cS'y$ = la cavalière de y .

Sur cette illustration, nous pouvons alors nous initier à l'Équivalence principale que Russell va faire jouer ici. Dans l'exemple elle donne :

x précède $y \equiv x$ (donne le bras à qui vient avant qui prend le bras de) y .

Cela signifie que dans le cas général, nous avons:

$$xPy \equiv x(S|Q|{}^cS)y.$$

Ce qui nous permet d'écrire:

$$P = S|Q|{}^cS.$$

Le point essentiel, illustré par le paradigme, est que, dans le Cadre défini par le Rectangle Relationnel, un 1er Gentleman *précède* un 2d Gentleman ssi le 1er a une Cavalière qui vient avant la Cavalière *accordée* au 2d. Autrement dit : ssi le 1er a une Lady qui *prend* son bras tout en *venant avant* une Lady à qui le 2d *donne* le bras. Dans ce cas la relation «précéder» est le produit relatif des trois relations «donner le bras», «venir avant» et «prendre le bras». Ce qui permet de comprendre la première conclusion générale que Russell tire ici :

Ainsi, dire que P et Q sont ordinalement similaires équivaut à dire qu'il y a une relation S de un à un ayant $C'Q$ pour codomaine et donnant $P = S|Q|{}^cS$.

Il ne reste plus alors qu'à donner la Définition qui, pour la Similarité entre les

Relations, va correspondre à la Df sm Attributs pour la Similarité entre les Attributs. En notant la relation de similarité ordinale par “smor” (abréviation de “similaire ordinalement”), cette Définition sera la suivante :

$$(\text{Df sm Relations}) \quad P \text{ smor } Q \equiv \exists_S (S \in 1 \rightarrow 1 \ \& \ C'Q = \exists 'S \ \& \ P = S|Q|^cS)$$

(«La relation P est similaire à la relation Q ssi il existe une relation S telle que S est une relation de un à un, le Champ de Q est le Codomaine de S et P est le produit relatif de S , Q , et *converse de S* .»)

Cette Définition ne fait que développer explicitement l'idée-clef que Russell esquissait sur le modèle de la Carte & du Territoire, quand il disait que «la structure de la carte correspond à celle de la contrée dont elle est la carte» (*iPhMath*, p. 52-53). Le fait que *la Structure de la carte correspond à la Structure du pays* équivaut au fait que des relations comme être au-dessus ou être à gauche, entre des points de la carte, sont respectivement *similaires* à des relations comme être au nord ou être à l'ouest, entre des lieux du territoire, cela en raison de l'*existence d'un corrélateur* qui est ici la relation de correspondance. De ce fait, le concept de **Structure**, chez Russell, est d'abord à comprendre d'après des paradigmes comme la Procession ou la Carte & le Territoire. C'est-à-dire que l'**Identité de Structure**, chez Russell, se définit d'abord par la **Similarité de Relations** ou la *Corrélation de Relations* (P et Q) due à un Corrélateur S . C'est ce que Russell stipule expressément quelques pages plus loin (*iPhMath*, pp. 59-60) :

Nous pouvons dire, de deux relations similaires, qu'elles ont la même «structure».

Sauf exception, comme l'indique Russell en évoquant ici *deux* relations, la relation P et la relation Q en question ici sont distinctes (p. ex. «au nord» $\neq$ «au-dessus»).

En vertu de l'Analogie principale des *Principia Mathematica*, les deux concepts de Similarité (entre Attributs et entre Relations) conduisent respectivement, selon Russell à deux concepts de **Nombre**.

Quand il s'agit des Attributs (avec les classes qui sont leurs extensions), nous retrouvons la définition du Nombre Cardinal dans la perspective de Cantor et de Frege (*iPhMath*, p. 18) :

Le nombre d'une classe est la classe de toutes les classes qui lui sont similaires.

Quand il s'agit des Relations, nous obtenons le concept de *Nombre-relation* que Russell a découvert en 1901 (IGG, CRG, § 6. 5. 4) et défini en 1903 dans les *Principles of Mathematics* (§ 2. 5. 3). C'est parallèlement au concept de Structure qu'il est introduit en 1919 (*iPhMath*, p. 56) :

Le «nombre-relation» d'une relation donnée est la classe de toutes les relations qui lui sont similaires.

La locution «nombre-relation» obtenue en langue française quand on traduit littéralement «relation number» chez Russell manque à l'euphonie. Et surtout Russell dérive de «relation number», pour désigner la science qui reçoit l'objet ainsi nommé,

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

«relation arithmetic», locution qui alors ne peut se traduire que par «arithmétique des nombres-relation». Pour ces raisons nous traduirons aussi «relation number» par **nombre structural**, ce qui nous donnera immédiatement la locution «arithmétique structurale».

Il ne reste plus alors qu'à remarquer la coextensivité entre les *Trois* concepts en jeu : *Identité* de **Structure**, *Similitude* entre **Relations** et *Identité* de **Nombre-relation**. C'est ce que fait Russell un peu plus loin (p. 61):

C'est-à-dire que deux relations ont la même structure quand il y a entre elles similitude, i. e. quand elles ont le même nombre-relation.

Nous appellerons ce que décrit cette proposition le **Triptyque Structural** de Russell et cette proposition elle-même **Thèse du Triptyque Structural**.

Les deux concepts de Similarité, d'ailleurs, ne sont pas simplement juxtaposés comme le monadique et le polyadique. Dans les *PM*, Whitehead & Russell ont déterminé aussi dans quelle mesure il y a de surcroît convergence entre les deux (II, p. 296) :

Chaque fois que la similarité se trouve démontrée entre deux classes α et β , alors si β est donné comme le champ de quelque relation Q , et si S est la relation corrélatrice, alors $S \cdot Q$ est semblable à Q , et $S \cdot Q$ possède α pour champ. Donc des classes similaires sont les champs de relations semblables. On ne doit pas supposer, cependant, que les relations semblables sont coextensives aux relations dont les champs sont similaires. Cela n'a pas lieu même quand nous nous confinons aux relations sérielles, sauf dans le cas spécial des relations sérielles finies.

C'est donc la différence fini / infini qui détermine les limites de la coextensivité entre similarité des classes et similitude des relations..

*

Dans le paragraphe même qui commençait en affirmant que *deux relations similaires ont la même structure* se trouve également défini un autre concept, rendu indispensable par l'agrandissement de la logique lorsqu'elle déborde la logique des attributs en une logique des relations (*iPhMath*, p. 60) :

Exactement comme une classe peut être définie par une variété de concepts différents mais co-extensifs – e. g. «homme» et «bipède sans plumes» – deux relations qui sont conceptuellement différentes peuvent se trouver dans le même ensemble de cas.

Afin de voir et ce que cela signifie et quel rapport cela présente avec le concept de Structure, nous illustrerons cette notion en prolongeant le paradigme de la Procession. Imaginons à cette fin la situation suivante, que nous appellerons la Sous-procession :

x précède y

$$\begin{array}{c}
 \Leftrightarrow \\
 x \text{ a un compte en banque mieux garni que celui de } y \\
 \Leftrightarrow \\
 x \text{ donne davantage d'autographes que } y \\
 \Leftrightarrow \\
 x \text{ a davantage de décorations que } y \\
 \Leftrightarrow \\
 x \text{ paie moins d'impôts que } y \\
 \Leftrightarrow \\
 x \text{ dort moins bien que } y \\
 \text{etc.}
 \end{array}$$

Nous avons ici une série de relations différentes (elles n'ont pas la même *intension*) mais qui (dans la situation imaginée comme exemple) s'appliquent aux mêmes couples de termes et ont donc la même *extension*. Il s'agit donc d'autre chose que le cas où deux relations différentes, en dépit de leur différence, exhibent une même structure. Les deux cas, cependant, ne sont pas à disjoindre, et la Sous-procession peut être considérée comme un cas limite de la Procession : celui où le Corrélateur S est la relation d'identité. Alors tout se joue sur un seul côté du Rectangle Relationnel où, en simplifiant l'exemple pour le ramener à celui qu'illustre *Le Savetier & le Financier*, nous aurons :

$$\begin{array}{ccc}
 x & \text{est plus riche que} & y \\
 \parallel & \longrightarrow & \parallel \\
 x & \text{dort moins bien que} & y.
 \end{array}$$

Lorsque la notion de structure prend la forme des différentes relations de même extension, nous l'appellerons «structure identitaire» ou *unilatérale*. Et nous pouvons ajouter que la structure identitaire est une forme dégénérée de la *Structure* telle que la définit Russell en général, c'est-à-dire par la *Similarité ou Corrélation des Relations* et l'*Identité du Nombre-relation* entre des relations.

Le Schéma Γ , inversement, qui condense les deux rôles de la similarité pour tous les cas de fonctions propositionnelles (aussi bien attributives que relationnelles) va se révéler le schéma qui charpente l'analyse russellienne des mathématiques dans sa totalité, en particulier dans son rapport aux contributions de Peano et Frege d'une part, de Cantor d'autre part. La dualité qui en résulte va se manifester prioritairement sur la notion d'Infini.

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

III. LA SYSTÉMATISATION DE L'INFINI CHEZ RUSSELL

Russell est le philosophe qui a systématisé le concept d'Infini mathématique (PM, IIIe Partie, Section C : «Le Fini & l'Infini», pp. 181-184). C'est ce qu'ont relevé Boolos¹⁰ et Grattan-Guinness (CRG, § 7.9.6). La systématisation va prendre la forme d'un Distinguo entre «deux manières (ways) différentes» de définir «le fini et l'infini», distinguo guidé par la dualité du Schéma G et développé dans un *chiasme de l'Infini* en raison de l'échange de rôles qui va se produire ici pour les notions d'*ensemble* et de *nombre* d'une part, ainsi que pour les notions même d'*infini* et de *fini* d'autre part. C'est ce qu'il faut appeler la distinction entre l'Infini selon Dedekind et l'infini selon Cantor et Frege. Puis, une fois ce distinguo développé, les PM vont définir entre ses deux termes un *rôle de l'Axiome du Choix* et enchaîner les deux notions en jeu dans un Théorème qui, en donnant un *télos* au distinguo, lui confère la consécration de l'usage mathématique. D'où les trois sections de la présente partie.

1. L'infini selon Dedekind : la *Réflexivité ensembliste*

Cette première approche procède en partant de l'*Ensemble* infini pour parvenir au *nombre* infini.

Le concept d'ensemble infini trouve son paradigme dans le Paradoxe de Royce que rappelle Russell. C'est le paradoxe de la Carte sur le Territoire. Lorsque la carte d'un territoire est posée sur ce territoire, elle en occupe seulement une (petite) partie. Mais par ailleurs nous pouvons imaginer que chaque point du territoire est relié par un fil à un point qui lui correspond sur la carte. Par conséquent la puissance de la partie égale celle du tout. C'est ce paradoxe que Dedekind a retourné en *Définition* de l'Infini, dans l'exploitation de paradoxe qui lui est propre : Un ensemble infini est un ensemble qui *se réfléchit* dans une de ses parties aliquotes, c'est-à-dire qui peut être mis en bijection avec un de ses sous-ensembles stricts. On dit alors qu'il s'agit d'un ensemble réflexif. D'où les termes de Whitehead et Russell : «nous appelons une classe réflexive quand elle contient une partie propre similaire à elle-même». Et par conséquent le premier concept d'*Infini* est la *Réflexivité* d'un *ensemble*. Or le *ressort structural* de cette définition est le Principe de Hume. Par conséquent c'est la Similarité des Classes (PM, *73) qui permet ici de donner la définition de l'infini. C'est la *Similarité des Ensembles* qui mène à l'*Infinité comme Réflexivité*. Nous pouvons donc dire que dans le Schéma Γ , cette définition est obtenue sur l'axe $\downarrow$.

La définition du *nombre* infini (la découverte de Cantor) en est alors un corollaire: un nombre infini est la puissance d'un ensemble infini.

2. L'infini selon Frege et Cantor : la *non-Inductivité* numérique

Cette seconde approche procède en partant du *Nombre* infini pour parvenir à l'*ensemble* infini.

10. George Boolos, *Logic, Logic and Logic*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1998, p. 262.

La définition du nombre infini a son origine chez Cantor. L'idée-clef de cette définition se trouve en effet dans la lettre de Cantor à Peano datée du 14 décembre 1895, là où Cantor observe que *les nombres finis obéissent au principe d'induction mathématique mais que les nombres infinis ne s'y plient pas* (Dauben, p. 227). A partir de cette idée-clef, la définition procède en deux moments que nous pouvons appeler, afin de mieux fixer les idées, l'«étape de Frege» et l'«étape de Cantor»: on définit d'abord les nombres finis, puis les nombres infinis. Même l'étape de Frege a son équivalent chez Cantor, dans sa lettre à Peano datée du 14 septembre 1895, là où Cantor affirme que le principe d'induction mathématique découle «avec une nécessité absolue de notre définition de la séquence des nombres finis». Cette définition est celle que Cantor a donnée en 1895 dans *Sur les fondements de la théorie des Ensembles Transfinis*, au § 5 intitulé «Les nombres cardinaux finis» où se trouve présentée la «série illimitée» que forment ces nombres, avec leur principe d'engendrement à partir de 1 par +1. Mais la priorité revient à Frege qui, dans sa *Begriffsschrift* de 1879 a consacré la IIIe et dernière partie à une «Théorie générale des séquences». On y trouve au § 81 une note qui se réfère à Jacob Bernoulli en tant que penseur pionnier de l'induction mathématique (en 1686) ; et au § 100 est défini le cas où la séquence commence avec un membre initial pour transmettre à partir de lui la «procédure» qui la définit. On rejoint ainsi la définition de Whitehead et Russell : «Un cardinal inductif est un cardinal qui peut être atteint à partir de 0 par des additions successives de 1». Le *Fini* mathématique se définit donc par l'*Inductivité*. C'est l'étape de Frege. Mais ce qu'il s'agit de définir ici est l'*Infini*. Et c'est alors que nous retrouvons les deux Principes du *Procédé* de Cantor : $+1$ & $\lim(\dots)$. Le premier Principe équivaut pour les ordinaux à ce que transmet la «procédure» de Frege quand elle engendre les cardinaux finis en tant qu'inductifs. Le second Principe déborde l'inductivité pour poser au plan ordinal un prototype de cardinalité infinie. L'infini peut ainsi se définir par la *non-Inductivité*. Dans le Schéma Γ , par conséquent, la définition de l'infini comme non-inductivité se situe sur l'axe horizontal $\rightarrow$, celui qui porte à la fois les relations *P* telles que la relation de succession parmi les nombres finis et, avec le *Champ* de telles relations, l'ensemble *infini* de la Série qu'elles peuvent engendrer.

Un ensemble infini se définit en conséquence comme un ensemble à cardinal non-inductif (on pourrait dire aussi: à puissance *ultra-inductive*).

3. Une Place pour l'Axiome du Choix sur le Pont de Littlewood à Cambridge

Dès leur distinguo entre les deux manières de définir le fini et l'infini (*PM*, tome II, p. 181), Whitehead et Russell ont soin d'ajouter que «l'on ne peut établir l'équivalence de ces deux manières qu'en admettant l'axiome multiplicatif» appelé aussi Axiome du Choix (= AC).

En 1919, Russell a donné de l'Axiome du choix le paradigme du millionnaire qui achète $\aleph_0$ paires de chaussures et $\aleph_0$ paires de chaussettes. Le point est que parmi les chaussures nous avons la différence entre la droite et la gauche qui n'existe pas pour les chaussettes. Nous pouvons donc dans chaque paire de chaussures sélectionner une chaussure, alors que pour les chaussettes une telle sélection n'est possible qu'en

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

postulant pour chaque paire un *élément distingué*. Le postulat de l'élément distingué, quand il est étendu à un ensemble infini de sous-ensembles, est l'Axiome du Choix.

Dans la comparaison entre les deux définitions de l'infini, l'Axiome du Choix trouve un rôle de critère. Comme le précisent les *Principia Mathematica* (*124, p. 270):

Il est aisé de prouver que les classes réflexives ne sont pas inductives (*124.271)

mais (cf. aussi p. 184)

Prouver que les classes qui ne sont pas inductives doivent être réflexives ne s'est pas révélé possible jusqu'à présent sans admettre l'axiome multiplicatif.

Cette *dissymétrie de l'Infini* selon Russell demande sans doute à être comparée avec celle qui subsiste entre les deux *Côtes du Transfini* selon Cantor. Dans la perspective cantorienne de Zermelo, en effet, l'Axiome du choix est introduit afin de démontrer que *tout* ensemble peut être *bien-ordonné*, c'est-à-dire *astreint* à se plier au paradigme cantorien du Bon-ordre. La dualité de Russell est donc sur le plan *conceptuel* un analogue de ce qu'est la dualité de Cantor sur le plan *théorique*. La définition de l'infini par la Réflexivité correspond dans le transfini à son caractère Exponentiel, celui qui, par exemple, permet directement la quantification du continu comme $2^{\aleph_0}$. Et de même la définition de l'infini comme non-Inductivité correspond dans le transfini à son côté en Tour de Babel, celui qui commence par la série des nombres inductifs pour mieux la dépasser ensuite une infinité de fois et engendrer ainsi les Alephs. Or le côté Tour de Babel du transfini est aussi celui qui est conditionné par la transmission sur lui du Bon-ordre, dont la généralisation dépend de l'Axiome du choix. Par conséquent la nécessité d'ajouter à la non-inductivité l'Axiome du choix pour atteindre la Réflexivité correspond dans le Transfini à la difficulté d'atteindre à partir de son côté Tour de Babel son caractère exponentiel, difficulté qu'illustre l'incapacité de Cantor à démontrer que $2^{\aleph_0}$ se ramène à $\aleph_1$. Le *distinguo* de Russell est donc un éclairage conceptuel sur la dualité de Cantor.

Mais le fait qu'une distinction conceptuelle joue son rôle d'éclairage sur une dualité d'ordre théorique n'interdit pas de faire jouer à cette distinction, par-dessus le marché, un rôle théorique. C'est ici que la Place de l'Axiome du choix nous conduit à un pont de Cambridge.

Selon J. R. Littlewood (mis en exergue par Boolos en 1994; in Boolos, 1998, p. 225) Russell «eut l'obsession secrète de démontrer *au moins un* véritable théorème de mathématiques. De fait il y en a un». Il ajoutait : «Perfectly good mathematics». Nous avons là un échantillon édifiant de cas où une bonne question est précédée d'une réponse qui n'est pas à la hauteur de sa question. La bonne question, c'est de savoir s'il y a chez Russell quelque chose qui mérite le titre de *Perfectly good mathematics*. La réponse est celle qui restreint ce titre à un seul théorème des PM.

Dans l'*Histoire de mes Idées Philosophiques*, sur les trois chapitres de philosophie des mathématiques, deux chapitres (7 et 8) sont intitulés *Principia Mathematica*, sous-titrés respectivement «Aspects philosophiques» et «Aspects mathématiques». Au début de ce dernier Russell raconte que Whitehead et lui furent désappointés de

constater que le second aspect passait pratiquement inaperçu. La seule erreur de Russell, ici, me semble être de concevoir les deux aspects dans un rapport de disjonction exclusive. Il est parfaitement possible que certains aspects au moins d'un tel travail soient à la fois philosophiques *et* mathématiques. En fait la présente étude est construite entièrement sur l'idée que, dans la philosophie mathématique de Russell, ce qu'il y a de plus important dans les aspects *philosophiques* se trouve dans les *aspects mathématiques*. En conséquence, pour ce qui est de savoir ce qui chez Russell a droit au titre de *Perfectly good mathematics*, c'est tout le chapitre 8 de 1959 qui est à prendre (sans exclusive) comme guide de lecture.

Si nous reconsidérons dans cette perspective le jugement de Littlewood et le théorème qu'il y a sélectionné, nous pourrions en tirer une leçon fructueuse. Accordant les yeux fermés au mathématicien de Cambridge que ce théorème a droit d'être estampillé *Perfectly good mathematics*, nous allons pouvoir vérifier qu'il a droit de surcroît au titre de *Perfectly good philosophy*. (Pour ce qui relève des «aspects philosophiques» officiels, c'est-à-dire des Antinomies et de la «Théorie des Types» destinée à les proscrire, il suffira de préciser que si les individus sont dits de type 0 un ensemble E d'individus est alors de type 1, l'ensemble de ses parties de type 2, etc. Et qu'un cardinal homogène est selon le *103 la classe de toutes les classes similaires à quelque classe $_$ et du même type que $_$)

Le théorème de *Principia Mathematica* privilégié par Littlewood est la thèse

$$*124.57 \vdash : \mu \in \text{NoC-NCinduct} \supset 2^2 \text{ puissance } \mu \in \text{NCrefl}.$$

(“ Si μ appartient à la classe des cardinaux homogènes moins la classe des cardinaux inductifs, alors 2^2 puissance μ appartient à la classe des cardinaux réflexifs ”).
Ce que Littlewood paraphrase

$$\vdash \text{ Si } \mu \text{ est infini, alors } 2^2 \text{ puissance } \mu > \aleph_0.$$

Boolos (p. 262) a excellemment illustré le fait que, les *Principia Mathematica* étant comme chacun sait la bible de la logique mathématique, ses théorèmes peuvent se commenter comme des versets bibliques (y compris avec les adaptations du commentaire destinées comme ici à le rendre plus proche encore de la Lettre du Texte) :

Que signifie ce théorème ? Les théorèmes sur les nombres cardinaux sont souvent compris au mieux comme des théorèmes cryptés au sujet des correspondances un-à-un. Après décodage, le théorème déclare que si x est un ensemble infini (au nombre cardinal m), alors l'ensemble des entiers naturels (qui a le nombre cardinal $\aleph_0$) peut être appliqué bijectivement dans l'ensemble-puissance $\mathcal{P}x$ de l'ensemble-puissance $\mathcal{P}x$ de x (qui a ainsi le cardinal 2^2 puissance μ ; de sorte $\aleph_0 \leq 2^2$ puissance μ), c'est-à-dire que $\mathcal{P}x$ est infini au sens de Dedekind ; mais qu'il n'y a pas de correspondance un-à-un entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble-puissance de l'ensemble-puissance de x (de sorte que $\aleph_0 \neq 2^2$ puissance μ , avec plus précisément 2^2 puissance $\mu > \aleph_0$). La partie la plus intéressante du théorème est ainsi que si x est un ensemble infini [= non inductif], alors $\mathcal{P}x$ est infini au sens de Dedekind.

*Le Transfinité,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

Dans cette glose, il suit déjà de la dernière phrase que Littlewood n'a vu ici que la partie la moins intéressante du théorème. Mais nous pouvons à notre tour paraphraser cette dernière phrase en obtenant par là-même une formulation abrégée du Théorème :

***124.57 abrégé** | — : Si μ est *non-inductif*, alors 2^2 puissance μ est *réflexif*.

Et ce que Boolos ajoute p. 263 sera le commentaire décisif de cette formulation ramassée :

le point est que Russell ne présuppose pas que le type des individus doit être réflexif. Il suppose qu'il est non-inductif puis montre qu'il suit de cette supposition plus faible que le type 2 est réflexif, et inclut ainsi une sous-collection similaire à l'ensemble des entiers naturels.

Pour cette raison, le Théorème *124.57 des PM (spécialement sous sa forme abrégée) peut être appelé le *Pont de Littlewood à Cambridge*. En effet, sa signification essentielle est de permettre un passage partant de la rive non-Inductivité pour arriver sur la rive Réflexivité. Afin de voir exactement ce que ce passage autorise, toutefois il faut ajouter ici le commentaire du commentaire de Boolos que nous devons à Demopoulos¹¹

c'est un théorème central des *Principia* (Vol. II, *124.57) que l'infinité ordinaire ou «non-inductivité» de la collection des individus suffit – sans l'Axiome du choix – à prouver l'infinité au sens de Dedekind des cardinaux de Russell-Whitehead.

Cela signifie que le Pont de Littlewood permet le passage du Non-inductif au Réflexif sans payer l'Axiome du Choix comme péage. Mais il faut ajouter qu'un tel passage demeure impossible quand la non-inductivité et la réflexivité concernent un même ensemble. Il n'est possible ici que parce que, partant à gauche d'un ensemble x , nous considérons à droite $\mathcal{P}x$. En dépit de cette substitution quant au sujet auquel s'attribue l'infinité, le Théorème *124.57 des PM garde toute sa résonance philosophico-mathématique. En effet il donne une nouvelle illustration du *distinguo* de Russell entre les deux approches possibles de l'infini. Mais de surcroît ce n'est plus seulement une distinction conceptuelle : c'est une distinction théorique, permettant de donner sens à la différence entre ce qui se passe en protase et en apodose d'un même théorème. Les deux termes du *distinguo* ne sont plus seulement juxtaposés en dessus de cheminée : ils sont *enchaînés* dans une implication stricte. Pour la systématisation de l'infini selon Russell, c'est d'abord un épitomé aux dimensions d'une *épigramme*. Mais cette épigramme est aussi une *moralité* de la fable.

*

Il nous faut maintenant revenir à la table d'orientation offerte par le Synopsis de 1959 avec ses trois points. Parmi ces trois points de 1959, le principal est certaine-

11. William Demopoulos, " The philosophical Basis of our Knowledge of Number ", *Noûs*, 32, 4 (1998).

ment le premier : celui qui porte sur les deux notions de **Structure** et de *Nombre-relation* dans leur équivalence. La preuve en est que dans tout ce qui précède, ce premier point a été le seul encore à recevoir un exposé (d'abord dans les données cantorienne qui l'ont motivé, puis pour lui-même, et enfin dans ses premiers corollaires). Il fournit les fondations qui vont nous permettre maintenant d'exposer les deux derniers points : « Etc. » et « Série ». Avec (pour éclairer comparativement leur signification) leurs conséquences quant au rapport de Russell à Peano et Frege ainsi qu'à Cantor.

IV. LE « ETC. » MATHÉMATIQUE : LES NOMBRES FINIS

1. Les cinq Axiomes de Peano

En 1919, dans l'*Introduction à la Philosophie Mathématique*, le premier chapitre est construit sur un examen critique de l'axiomatique offerte par Peano pour l'Arithmétique. Elle tient en 5 axiomes que Russell énonce comme suit:

- (1) 0 est un nombre
- (2) Le successeur d'un nombre est un nombre
- (3) Deux nombres n'ont pas le même successeur
- (4) 0 n'est le successeur d'aucun nombre
- (5) Si une propriété appartient à 0 et si, quand elle appartient à un nombre, elle appartient à son successeur, alors elle appartient à tous les nombres.

Russell tient pour acquis que ces cinq axiomes permettent de déduire toute l'arithmétique. L'objection qu'il adresse à cette axiomatisation tient à ce qu'elle admet une infinité d'interprétations. Si par exemple nous donnons au « 0 » de Peano le sens de 1, ses cinq axiomes s'appliqueront toujours. La conclusion critique de Russell est qu'en croyant cerner le concept de nombre naturel dans une « définition par postulats », Peano a en réalité défini un autre concept : celui de Progression. Nous appellerons même *Progressions de Peano* toutes les suites vérifiant les cinq axiomes et en particulier les séquences infinies obtenues en amputant la série des entiers naturels du côté de la tête, c'est-à-dire en leur ôtant un quelconque segment initial de longueur fini. Dans le repère fourni par le Schéma Γ , le fait que toutes les progressions de Peano sont similaires entre elles atteste que nous nous trouvons ici sur l'axe $\downarrow$ des similarités entre classes ou attributs.

L'obtention des Progressions de Peano en nombre infini là où l'on attendait la définition du nombre naturel est du même coup une propédeutique à l'œuvre de Frege sur le même terrain que Peano: l'Arithmétique des nombres finis.

2. De Frege 1884 à Frege 1879 ; l'ABC de Frege 1879 dans Russell 1959

Le Schéma Γ , du point de vue russellien, fournit un *repère analytique* sur l'œuvre de Frege avec ses deux textes fondateurs en philosophie mathématique : les

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

Fondements de l'Arithmétique et la *Begriffsschrift*, auxquels correspondent respectivement, dans l'*Introduction à la Philosophie Mathématique*, les chapitres II et III. D'après le repère du schéma Γ , en effet, dans le traitement des nombres finis, les *Fondements de l'Arithmétique* suivent sur l'axe $\downarrow$ la méthode fournie par la similarité des Attributs, alors que sur l'axe $\rightarrow$ la *Begriffsschrift*, sans même s'occuper de la similarité entre les relations, se contente de clarifier le comportement mathématique d'une relation-clef quant à la compréhension des nombres finis — en attendant que Cantor complète cet axe $\rightarrow$ en le faisant proliférer du côté de sa queue avec l'engendrement des ordinaux infinis.

En 1884, dans les *Fondements de l'Arithmétique*, Frege fournit ce qui faisait défaut chez Peano : la définition des nombres naturels dont Russell rappelle en 1919 sa propre version au chapitre II: *le nombre d'une classe est la classe de toutes les classes qui lui sont similaires* (p. 18).

En 1879, dans la IIIe Partie de la *Begriffsschrift*, le § 24 commence par un graphisme qu'Ivor Grattan-Guinness (CRG, § 4.5.2) qualifie à juste titre d'«*inscription mystérieuse*» (*mysterious design*). Comme Grattan-Guinness l'a vu, cette inscription peut être ramenée, pour ce qui est de sa signification philosophique, à une version schématique (ici légèrement différenciée) :

||— [[Gothique comme $\mathfrak{R}$] ° Grec comme Ω].

Frege fournit un exemple qui, replacé dans l'Inscription Mystérieuse, en donne le cas suivant:

||— [[On a la circonstance que tout enfant d'humain est humain] = La propriété d'être humain est héréditaire].

Dans cet exemple, si nous notons la forme de «*e est enfant de d*» par «*e est f de d*», à lire «la procédure *f* appliquée à *d* donne *e*», et la forme de «*x est humain*» par «*F(x)*», à lire «*x a la propriété F*», nous obtenons l'exemplification appropriée pour suivre la définition dans laquelle se développe l'Inscription mystérieuse:

Si de la proposition que d a la propriété F, quel que soit d, il peut toujours être inféré que chaque résultat d'une application de la procédure f à d a la propriété F, alors je dis : «La propriété F est héréditaire dans la f-séquence».

L'Inscription Mystérieuse de 1879 introduit ainsi à un jeu conceptuel dont nous allons trouver l'ABC chez Russell en 1959 (pp. 71-72). C'est ce qu'il faut donc appeler *l'ABC de Frege 1879 chez Russell 1959*.

Le fil directeur en est que nous nous trouvons sur l'axe Longitude $\rightarrow$, où le concept principal est une *Relation* binaire (c'est-à-dire une fonction propositionnelle à deux places). A partir de cette idée directrice, l'ABC de Frege est obtenu du fait que sur la *Relation* en jeu ici vont venir se greffer

- A) un *Attribut A*, c'est-à-dire une fonction propositionnelle à une place
- B) une autre *Relation R'* à deux places
- C) une *Classe C*, c'est-à-dire l'extension d'un attribut.

Sur les exemples que donne Russell, cet ABC se développe alors comme suit, avec ses trois points frappés au poinçon de la relation R en question, qui peut être appelée pour cette raison la *Relation à la Clef* :

A) Le concept d'**Attribut héréditaire par R**

Par exemple, être humain est un attribut héréditaire dans la relation de Parent à Enfant, s'appeler «Smith» est héréditaire dans la relation de Père à Fils.

Df : Un attribut F est R -héréditaire ssi quand $Fx \ \& \ xRy$, alors Fy .

B) Le concept de **Relation Ancêtre-par- R**

Df : x est un ancêtre par R de y ssi tout attribut R -héréditaire de x est aussi attribut de y .

C) Le concept de **R -Lignage**

Df : Le lignage de x par la relation R = l'ensemble des d dont x est ancêtre par R .

Une fois que nous disposons du concept de lignage, une Définition de la Série des nombres naturels est possible, que Russell donne dans le chapitre II (pp. 22-23) de l'*Introduction à la Philosophie mathématique* et que nous énonçons ici sous une forme légèrement modifiée afin de lui donner toute sa teneur intuitive :

Les «nombres naturels» sont le lignage de 0 selon la relation «a pour successeur».

Cette définition s'ajoute à celle du chapitre I (pp. 18-19):

Le nombre d'une classe est la classe de toutes les classes qui lui sont similaires.

Là où le Logicisme avait promis une définition du concept de nombre naturel, par conséquent, il nous en donne deux. Dans le vocabulaire de Leibniz, la définition du Chapitre I est une définition *en intension* et celle du chapitre II une définition *en extension*. Dans cette dualité, quand on se place au point de vue purement philosophique, la seule véritable définition est celle qui nous donne l'essence de la chose définie, c'est-à-dire la définition en intension. Mais ici l'exploit revient à la définition en extension, puisqu'elle surmonte l'obstacle habituellement opposé à une telle définition (y compris selon Russell lui-même) par un ensemble infini.

La nécessité de compléter la définition en intension par la définition en extension était justifiée par Frege en 1884 dans les termes suivants (*Fdts*, § 80):

Seule cette définition de la succession dans une suite permet de réduire aux lois logiques générales l'inférence de n à $(n + 1)$, qui pourrait sembler propre aux mathématiques.

Frege répondait ainsi à l'avance, dès 1884, à la thèse de Poincaré qui, dix ans après, en 1894, ferait du raisonnement par récurrence un argument contre la réduction des mathématiques à la logique formelle et à son caractère analytique. Russell rappelle aussi cette raison (p. 27) :

Nous définissons les «nombres naturels» comme ceux auxquels les preuves par induction mathématique peuvent être appliquées, i. e. comme ceux qui possèdent toutes les propriétés inductives.

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisité*

Il en résulte que, là où Poincaré voyait un «principe» supplémentaire, propre aux mathématiques, il n'y a selon Russell que cette définition en termes logiques.

Frege, de surcroît, juste avant d'aborder en 1884 les nombres infinis de Cantor, ajoutait (au § 83) que

la proposition « n appartient à la suite des nombres commençant par 0» veut dire la même chose que « n est un nombre fini».

Russell (p. 27) semble dire la même chose quand il déclare :

L'induction mathématique fournit, plus que quoi que ce soit d'autre, la caractéristique essentielle par laquelle le fini est distingué de l'infini. [Thèse R / fini]

Mais en fait il vient de dire juste auparavant:

Nous emploierons la locution «nombres inductifs» pour désigner l'ensemble jusqu'ici désigné par «nombres naturels». La locution «nombres inductifs» est préférable en ce qu'elle remémore que la définition de cet ensemble de nombres est obtenue d'après l'induction mathématique. [Thèse R / Nb]

Chez les deux auteurs il s'agit de prendre en compte le fait que les nombres finis vont être suivis des nombres infinis. Mais les deux remarques s'enchaînent et n'ont donc pas le même sens. Frege affirme que la notion de nombre fini s'analyse exactement par celle du lignage de 0 ou, autrement dit, par celle de nombre inductif. Et hors contexte la thèse R / fini a donc le même sens. Mais ce que veut dire la thèse R / Nb, c'est que *le concept de nombre naturel se définit par celui de nombre inductif*. Et avec ce contexte, la thèse R / fini signifie par conséquent, de son côté, que parmi les deux définitions de l'infini repérées dans le schéma Γ , *la définition obtenue comme celle des nombres naturels sur l'axe $\downarrow$ d'après le principe de Hume cède le pas, en dernière analyse, à la définition obtenue sur l'axe $\rightarrow$ en allant au-delà de l'inductivité*. Par conséquent les deux thèses de Russell, ici, convergent vers une seule et même idée : à savoir que **la définition logiciste des nombres finis** (de Peano ou Frege) **ne prend son véritable sens que lorsque les nombres finis sont vus comme seuil des nombres infinis** (de Cantor). C'est ce que nous appellerons ici la **1ère décision de Russell** en 1919 ou **Décision sur les nombres finis**.

La notion de «logicisme» se trouve ainsi placée dans un contexte plus vaste qui est offert par Cantor. Ce cadre cantorien, cependant, va se trouver lui-même débordé par le point de vue structuraliste dont Russell a posé les principes.

V. L'HORIZON ORDINAL SELON RUSSELL: NOMBRE SÉRIEL & NOMBRE STRUCTURAL

La création cantorienne est coextensive à la fécondité de son paradigme : le concept d'ensemble Bien ordonné. Dans *l'Introduction à la Philosophie Mathématique*, le chapitre IV est intitulé simplement «La définition de l'ordre». Puis (après le

chapitre V sur «Les variétés de relation»), le chapitre VI est celui sur «La Similarité entre Relations»). C'est dans le chapitre IV que Russell définit son concept de *Série*.

Ce chapitre est centré (p. 34) sur un Paradigme qui, chez Russell, va jouer un rôle analogue à celui du bon-ordre chez Cantor. C'est celui de la relation

x précède y

abrégée en

xPy .

C'est donc un paradigme directement issu du paradigme de la Procession – en y prélevant une seule série, que nous appellerons une *queue-leu-leu* (afin de ne pas la confondre avec la *queue* (tout court), comme *fin* de série), ou encore une *file* (indienne).

Le concept de Série est d'abord illustré dans le fini (p. 34) par les exemples suivants:

1, 2, 3 ; 1, 3, 2 ; 2, 3, 1 ; 2, 1, 3 ; 3, 1, 2 ; 3, 2, 1.

Il y a là six *Séries* pour un seul *ensemble*. Par conséquent le concept de série déborde celui de classe. Or ce qui distingue seulement ces séries est leur ordre. Russell ajoute : «Étant donné la relation ordonnatrice, le champ et l'ordre sont tous les deux déterminés». Et la Série est autre chose que son champ, qu'elle peut partager avec d'autres séries.

D'où la définition de la Série :

Une *Série* est la même chose qu'une relation sérielle

sachant que (p. 42) la classe des relations sérielles sera dite «suprêmement importante». Dans ce même chapitre IV, Russell donne deux définitions de la Relation sérielle. Mis à part les concepts élémentaires de transitivité et d'asymétrie pour une relation, ces définitions exigent seulement deux notions plus techniques : celles de «connexion» et d'aliorelativité pour une relation. Le vocable «aliorelatif» est dû à C. S. Peirce : une relation xRy est aliorelative ssi elle implique $x \neq y$. Et une relation xRy est dite connectée ssi pour tout couple $\langle x, y \rangle$ de son champ où $x \neq y$ on a xRy . Une relation « connectée » peut donc être appelée aussi une relation *omniprésente*.

Ce qui rend possible les deux définitions du sériel : Une Relation est *Sérielle* ssi elle est *Asymétrique*, *Transitive* & *Omniprésente* ou encore ssi elle est *Aliorelative*, *Transitive* & *Omniprésente*.

Lorsque nous remplaçons la Série « x précède y » dans le Paradigme de la Procession, nous illustrons l'insertion d'une Série dans un Nombre-relation. Et au chapitre «Similarité des Relations», Russell déclare :

L'application la plus évidente des nombres-relation est aux *Séries*. Deux *Séries* peuvent être regardées comme également longues quand elles ont le même nombre-relation.

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisité*

Sur le cas de la queue-leu-leu, nous rencontrons ainsi le schème de la «longueur» comme support intuitif du concept de nombre ordinal (p. 57): *deux queues-leu-leu ont la même Longueur ssi elles ont le même Nombre-relation.*

Et Russell stipule ensuite (pp. 56-57 // 93):

Les nombres-relation applicables aux séries peuvent être appelés des «nombres sériels» (ceux qui sont appelés communément «nombres ordinaux» en sont une sous-classe)

Ici, le problème est de savoir pourquoi Russell ne dit pas simplement «les nombres ordinaux» mais les désigne comme ceux qui sont *appelés communément* ainsi. Une telle manière de dire donne à penser que l'expression «nombres ordinaux» revient en réalité, non à la sous-classe qu'elle désigne en fait, mais à la classe toute entière. C'est d'ailleurs ce que les *Principles of Mathematics* (§ 231) déclaraient expressément :

Nous pouvons, ainsi, regarder un nombre ordinal comme une propriété commune aux ensembles de relations sérielles qui engendrent des séries ordinalement similaires. (§ 231)

Nous trouvons ici la **deuxième décision de Russell en 1919**. Et cette fois-ci c'est une décision qui s'étend aux **nombre infinis**. Elle consiste à concevoir les nombres ordinaux de Cantor à partir des notions de nombre sériel et de nombre-relation.

Dans les *Principles* (§ 298) Russell relevait comment Cantor, en 1897, «restreint expressément les nombres ordinaux aux séries bien ordonnées» et poursuivait en affirmant alors comparativement (§ 299) : «Il vaut la peine de répéter les définitions des notions générales impliquées dans les termes de ce qui peut être appelé l'arithmétique des nombres-relation». Le tome II des PM (p. 294) ajoutera :

Si les relations concernées sont limitées aux relations bien ordonnées, l'arithmétique de nombres-relation devient l'arithmétique ordinale développée par Cantor ; mais beaucoup des propositions de Cantor, comme nous allons le voir dans cette Partie, ne requièrent pas la limitation aux relations bien-ordonnées.

Le regard en arrière (sur Cantor), cependant, n'est destiné qu'à donner toute sa portée au regard jeté en avant (PM II, 296) :

Il n'est pas nécessaire de confiner la notion de similarité ordinale (ou de similitude comme nous l'appellerons aussi) aux relations *sérielles*. Quand deux relations possèdent une similarité ordinale, leurs structures internes sont analogues, et en conséquence elles ont beaucoup de propriétés en commun.

Cela signifie que chez Russell, à partir de 1903, l'**ordinal** au sens usuel (c'est-à-dire cantorien) saute à pieds joints par-dessus le **sériel** pour s'égaliser au nombre-relation c'est-à-dire au **structural**.

En 1959, la comparaison prend toute son ampleur tout en se voyant dotée de sa critériologie (p. 72) :

Ce que j'ai appelé «nombres-relation» recouvre des nombres d'une espèce entièrement nouvelle dont les nombres ordinaux sont un exemple très spécialisé. J'ai découvert que toutes les lois formelles qui sont vraies des nombres ordinaux sont vraies de cette catégorie qui est de loin plus générale.

Le point capital ici est l'invocation de «lois formelles» à l'étiage du concept de nombre-relation, c'est-à-dire à l'étiage du *Structural*. La notion de *Lois formelles* est sans doute le Leitmotiv de la Philosophie Mathématique chez Russell, de 1903 jusqu'à 1959. Dès les *Principles* elles apparaissent en tant que *Règles élémentaires de l'Arithmétique* (§ 286) et déjà, sous le nom de lois formelles, sur le concept de nombre-relation (§ 253, cf. § 290 sur les ordinaux). Mais c'est dans la situation d'un concept *non-répertorié* (il ne figure pas dans l'Index, ni des *Principles* ni de l'*iPhMath*, où il apparaît seulement sous la forme de ses cas particuliers comme la «Loi commutative»). Pour cette raison nous dirons que ce rôle des Lois formelles constitue le *Formalisme caché* de Russell. En 1912 (PM II, 294) on lit encore à propos de l'arithmétique structurale :

L'arithmétique résultant des définitions qui précèdent satisfait celles des lois formelles qui sont satisfaites dans l'arithmétique ordinale.

C'est seulement dans l'*iPhMath* (au ch. IX sur «Les séries infinies et les Ordinaux») que les «lois formelles usuelles» se trouveront numérotées de I à IV (p. 94). Il y a là ce que nous appellerons la *Table de la Loi* selon Russell. Ce qui est gravé sur ces tables est rappelé en 1959 et désigné alors comme «lois formelles traditionnelles de l'arithmétique» (p. 70). Russell précise alors :

Les débutants en mathématique sont toujours informés de ces lois sans qu'on leur en donne des preuves. Ou, si des preuves sont offertes, elles emploient l'induction mathématique et ne sont donc valides que pour les nombres finis.

Il ajoute (parlant au nom de Whitehead comme au sien propre) :

Cela fait partie des limitations que nous nous proposons de surmonter.

Russell révèle donc ici le fond du projet logiciste pour les lois formelles : démontrer ce qui était reçu du ciel comme table de la loi. Cependant une démonstration tient son importance de ce qu'elle démontre. Et sur l'étiage commun au formel comme au structural, cela nous ramène au second. C'est à son sujet que Russell peut déclarer (*iPhMath*, p. 94):

Parmi les lois formelles usuelles de l'addition, de la multiplication, et de l'exponentiation, toutes sont respectées par les cardinaux transfinis, mais seulement certaines sont respectées par les ordinaux transfinis, et celles qui sont respectées par eux sont respectées par tous les nombres-relation.

Autrement dit, Cantor a découvert (avec ses ordinaux) des *objets qui obéissent à une Loi plus grande qu'eux*. C'est ce que nous appellerons l'*excédent cantorien de la Loi sur l'objet de la Loi*. Introduire le concept de Nombre structural, chez Russell, consiste

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

donc, dans l'héritage cantorien, à élever l'objet au niveau de la Loi, c'est-à-dire à faire de l'objet l'égal de sa Loi. Un paradigme en est donné dans le fait que la non-commutativité de l'addition est «caractéristique de l'arithmétique structurale (*relation-arithmetic*) en général» (p. 90 ; cf chez Cantor, dans les *Grundlagen* de 1883, la fin du § 5).

Quand un nouveau concept mathématique, cependant, est la généralisation d'un ancien, le nouveau territoire obtenu n'est une conquête que si l'on y rencontre des Théorèmes dignes de l'ancien. C'est sur un tel exemple que nous allons terminer notre exposé (Cf. PM, II, p. 391, 393 et 456). Nous allons y retrouver l'Analogie Principale des PM entre le Cardinal & l'Ordinal.

Dans l'Arithmétique des Cardinaux (finis ou infinis), le Théorème de Cantor, traduit dans le langage des PM devient

$$\text{*116.72. } \vdash : \text{Nc}'\text{Cl}'\alpha = 2^{\text{Nc}'\alpha}$$

(«Le nombre cardinal de la classe des parties de la classe α est égal à 2 élevé à la puissance donnée par le nombre cardinal de la classe α »).

Ce qu'est 2 en arithmétique aura comme analogue en arithmétique structurale un nombre-relation noté 2_r . De même, puisque une relation P traitée en extension est une classe (à savoir, pour une relation binaire, la classe des couples qui entretiennent cette relation), $\text{Nc}'\text{Cl}'\alpha$ aura une analogue, notée $\text{Cl}'\text{C}'P$. Étant donné, dans $\text{Cl}'\text{C}'P$, deux parmi ses membres, α et β , on appelle «première différence» entre α et β le 1^{er} terme de l'un des deux qui n'appartient pas aux deux. Et on définit une relation P_{df} entre α et β telle que

$\alpha P_{df} \beta$ ssi la 1^{ère} différence entre α et β appartient à α .

Autrement dit $\alpha P_{df} \beta$ ssi précède β dans la différence entre α et β .

Au sujet de cette relation $\alpha P_{df} \beta$, les PM contiennent un théorème typique de la similarité entre des relations (cf. *176 pour la Df de P^Q et *55.01 pour celle de " $x \downarrow y$ ") :

$$\text{*177.13 } \vdash : x \neq y \supset P_{df} \text{ smor } \{(x \downarrow y)^P\}$$

(«Si x n'est pas y , alors la relation P_{df} est similaire à l'ensemble des couples $\langle x, y \rangle$ élevé à la puissance P »). Dès lors que les puissances des nombres-relation ont été introduits, *177.13 «devient» son corollaire

$$\text{*177.13 bis } \vdash : P_{df} \in 2_r^{\text{Nr}'P}.$$

Ce corollaire signifie que le nombre-relation de P_{df} est obtenu en élevant 2_r à la puissance $\text{Nr}'P$. Donc, dans les termes mêmes de Whitehead & Russell, le Théorème de Cantor pour les cardinaux ($\text{Nc}'\text{Cl}'\alpha = 2^{\text{Nc}'\alpha}$) a pour «ordinal» $P_{df} \in 2_r^{\text{Nr}'P}$. Cette expression d'«analogue ordinal» atteste toujours que, selon Russell, ce qui est en fait *nombre ordinal* chez Cantor est en droit un cas particulier mais paradigmatique de ce qui est *Nombre Structural* chez Russell.

Jusqu'à l'*Introduction à la Philosophie Mathématique* le structuralisme de Russell reste subordonné à son Logicisme. En effet l'identité de structure se définit par la similarité des relations et par conséquence le concept russellien de structure est analysé sans reste par la *Logique des Relations*. Mais en 1948, dans le chapitre «Structure» de *La Connaissance humaine, son Champ et ses Limites*¹², le rapport est inversé. Pour illustrer ce qu'il entend par «structure», en effet, le *premier exemple* que donne Russell n'est autre que la *forme logique*, cela signifie que la Logique se trouve subsumée sous le concept de structure et que le Logicisme est devenu un Structuralisme.

*Le Transfini,
les structures
et la logique.
La Philosophie
Mathématique
de Russell
revisitée*

12. B. Russell, *La connaissance humaine, son champ et ses limites*, Vrin.